ЛЕКЦИЯ-10

§ 5.4. Гильберт-Шмидт теоремасы

Егер $K(x,s)$ симметриялық ядросы үшін $\int_a^b K(x,s)\omega(s)ds=0$ теңдігін қанағаттандыратындай $\omega(x)\neq 0$ функциясы табылмаса, онда $K(x,s)$ ядросы тұйық деп, ал ондай $\omega(x)$ функциясы табылса, онда $K(x,s)$ ядросы тұйық емес деп аталады.

1 теорема *(Шмидт)*. Меншікті функциялар жүйесі тұйық болуы үшін ядроның тұйық болуы қажетті де, жеткілікті.

Дәлелдеуі. $K(x,s)$ ядросы тұйық емес ядро болсын, яғни $\omega(x)\neq 0$ функциясы табылып,

$$\int_a^b K(x,s)\omega(s)ds=0$$

шарты орындалсын. Соңғы өрнекті $\varphi_k(x)$ функциясына көбейтіп, сонан соң x бойынша 0-ден b-ға дейін интегралдасақ,

$$0=\int_a^b\left(\int_a^b K(x,s)\omega(s)ds\right)\varphi_k(x)dx=\int_a^b\omega(s)\left\{\int_a^b K(x,s)\varphi_k(x)dx\right\}ds=$$

$$=\int_a^b\omega(s)\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k}ds=\frac{1}{\lambda_k}\int_a^b\varphi_k(s)\omega(s)ds,$$

яғни $\{\varphi_k\}$ жүйесі тұйық болмайды.

Керісінше $\{\varphi_k(x)\}$ меншікті функциялар жүйесі тұйық болмасын, яғни $\omega(x)\neq 0$ табылып, олар үшін

$$\int_a^b\varphi_k(x)\omega(x)dx=0 \tag{81}$$

теңдігі орындалсын. Жоғарыда дәлелденген тұжырымнан

$$K_4(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^4}\varphi_k(x)\varphi_k(s).$$

Енді осы теңдікті $\omega(x)\omega(s)$-ке көбейтіп, одан кейін s пен x бойынша a-дан b-ға дейін интегралдап, (81) теңдігін ескерсек,

$$\int_a^b\int_a^b K_4(x,s)\omega(x)\omega(s)dsdx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^4}\int_a^b\varphi_k(x)\omega(x)dx\int_a^b\varphi_k(s)\omega(s)ds=0.$$

Ал $K_4(x,s)=\int_a^b K_2(x,t)K_2(t,s)dt$ болғандықтан, соңғы теңдеуден

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

$$0=\int_a^b\int_a^b K_4(x,s)\omega(s)\omega(x)dsdx=\int_a^b\left\{\int_a^b K_2(x,t)\omega(x)dx\right\}\times$$
$$\times\left\{\int_a^b K_2(t,s)\omega(s)\right\}dt=\int_a^b\left\{\int_a^b K_2(x,t)\omega(x)dx\right\}dt.$$

Сондықтан $\int_a^b K_2(x,t)\omega(x)dx=0$ және дәл осылай $\int_a^b K(x,t)\omega(x)dx=0,$ яғни теорема дәлелденді.

Егер $f(x)=\int_a^b K(x,s)h(s)ds=Kh\ (h(x)\in L_2|a,b|)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы $K(x,s)$ ядросы арқылы өрнектелген дейді.

2 теорема *(Гильберт- Шмидт).* $K(x,s)\in L_2(a,b)$ ядросы арқылы өрнектелетін кез келген $f(x)$ функциясы сол ядроның меншікті функциялары бойынша орташа жинақты Фурье қатарына жіктеледі.

Дәлелдеуі. Алдымен $K(x,s)$ ядросының меншікті функциялары $\{\varphi_k(x)\}$ арқылы $h(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктейік:

$$h(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}h_n\varphi_n(x)\ (h_n=(h,\varphi_n)).$$

Бессель теңсіздігін пайдалансақ, $\sum_{n=1}^{\infty}h_n^2\le\int_a^b h^2(x)dx$ қатарының жинақты екенін көреміз. Одан кейін $f(x)$ үшін Фурье қатарын

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}f_n\varphi_n(x) \tag{82}$$

түземіз, мұндағы, $f_n=(f,\varphi_n)=(Kh,\varphi_n)=(h,K\varphi_n)=\frac{1}{\lambda_n}(h,\varphi_n)=\frac{h_n}{\lambda_n}.$

Олай болса,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}h_n\varphi_n(x). \tag{83}$$

$h(x)\in L_2[a,b]$ болғандықтан $f(x)\in L_2[a,b]$ болады. Сондықтан Рисс-Фишер теоремасы бойынша (83) қатары орташа жинақты.

Енді (83) қатарының қосындысы $f(x)$-ке тең болатынын дәлелдейік. Ол үшін

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}h_n\varphi_n(x)$$

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

деп алайық. Онда

$$f(x)=S_m(x)=\int_a^b K(x,s)h(s)ds-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\int_a^b h(s)\overline{\varphi}_n(s)ds=$$

$$=\int_a^b\left[K(x,s)-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\overline{\varphi}_n(s)\right]h(s)ds=\int_a^b K^{(n)}(x,s)h(s)ds=K^{(n)}h.$$

Жоғарыдағы §5.3-тегі лемманың салдарын пайдалансақ, $m\to\infty$ ұмтылған жағдайында $\|f-S_m\|=\|K^{(n)}h\|\to 0$ болады.Демек,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}h_n\varphi_n(x),$$

яғни теорема дәлелденді.

Ескерту. Гильберт-Шмидт теоремасында $\{\varphi_k(x)\}$ меншікті функциялар жүйесі толық деп ұйғарылмайды.

3 теорема. Егер симметриялық ядро $\int_a^b |K(x,s)|^2 ds < A$ шартын қанағаттандырса, онда (83) қатары бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Жоғарыдағы (78) теңсіздігін пайдаланып, (83) қатарының қалдық бөлігін бағаласақ,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}h_k\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\le\sum_{k=n}^{n+p}h_k^2\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}\le A\sum_{k=n}^{n+p}h_k^2 .$$

Егер $\sum_{k=n}^{n+p}h_k^2$ қатарының жинақтылығын пайдалансақ, соңғы теңсіздіктен барлық $n>N$ және $\forall p>0$ үшін

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}h_k\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|<\varepsilon$$

екенін көреміз, бұдан Коши белгісін ескеріп, (82) қатарының бірқалыпты жинақты екенін дәлелдейміз.

Гильберт-Шмидт теоремасының салдары.

1 салдар. Қайталанатын $K_2(x,s)$ ядросы меншікті функциялар $\{\varphi_k(x)\}$ жүйесі бойынша

$$K_2(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\varphi_k(x)\varphi_k(s) \qquad (84)$$

түріндегі қатарға жіктеледі.

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

Расында, қайталанушы ядро анықтамасы бойынша

$$K_2(x,s)=\int_a^b K(x,t)K(t,s)dt\,.$$

Егер $K(x,s)\in L_2(D)$ болса, онда 2-теорема бойынша

$$K_2(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}h_k\varphi_k(x),\ h_k=\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k.$$

$K_2(x,s)$ үшін алынған жіктелудің оң жағындағы h_k-ны оның мәнімен ауыстырсақ, (84) теңдігі шығады.

2 салдар. Ядроның резольвентасы сол ядроның меншікті функциялары бойынша қатарға жіктеледі:

$$R(x,s;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k-1}\cdot\varphi_k(x)\cdot\varphi_k(s).$$

Расында λ-ның кіші мәндері үшін

$$R(x,s;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,s)$$

екенін дәлелдегенбіз, ал қайталанатын ядроның жіктелу қасиеті бойынша формулаларды пайдалансақ,

$$R(x,s;\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x)\varphi_k(s)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\varphi_k(x)\varphi_k(s)+\ldots+\lambda^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^n}\varphi_k(x)\varphi_k(s)+\ldots=$$

$$=\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{n+1}+\frac{\varphi_2(x)\varphi_2(s)}{\lambda_2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_2}\right)^{n-1}+\ldots+\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{n-1}+\ldots=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}.$$

Біртекті емес симметриялық ядролы

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds+f(x)$$

теңдеуінің шешімін анықтайық. $g(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ деп белгілейік. Егер $\varphi(x)\in L_2(a,b)$ болса, онда $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\varphi_k(x)$, мұндағы, C_k- тұрақты шамалар. Сондықтан

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}C_k\varphi_k(x) \qquad (86)$$

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

(85) теңдеуіндегі $\varphi(x)$ функциясы (86) теңдеуінің оң жағымен ауыстырсақ,

$$f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}C_k\varphi_k(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\left[f(s)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}C_k\varphi_k(s)\right]ds,$$

бұдан

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k\varphi_k(x)=\int_a^b K(x,s)f(s)ds+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}C_k\int_a^b K(x,s)\varphi_k(s)ds=$$

$$=\int_a^b K(x,s)f(s)ds+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}C_k\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$$

немесе

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k(1-\frac{\lambda}{\lambda_k})\varphi_k(x)=\int_a^b K(x,s)f(s)ds=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\lambda_k}\varphi_k(x). \qquad (87)$$

Бұл өрнектің екі жағындағы $\varphi_k(x)$ функцияларының коэффиценттерін салыстырып,

$$C_k=\frac{f_k}{\lambda_k-\lambda}\ (\lambda_k\neq\lambda, r=1,2,\ldots)$$

екенін аламыз. C_k $(k=1,2,\ldots)$ коэффицентері мәндерін (86) теңдігіне қойып,

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x)$$

Шмидт формуласын аламыз.

Егер $\lambda=\lambda_m$ рангісі r еселі меншікті мән болса, онда $C_m, C_{m+1},\ldots,C_{m+r-1}$ коэффицентерін (87) теңдігі бойынша анықтай алмаймыз, оның үстіне сол (87) теңдігінен

$$f_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx=0\ (k=m,m+1,\ldots,m+r-1)$$

екені шығады. Сондықтан бұл жағдайда (85) теңдігінің шешімі

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f_k}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x)+\lambda\sum_{k=m}^{m+r-1}C_k\varphi_k(x)+\lambda\sum_{k=m+r}^{\infty}\frac{f_k}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x)$$

түрінде жазылады.

Енді ядроларды кластарға бөлейік. Гильберт-Шмидт теоремасын қолдансақ,

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

$$\int_a^b K(x,s)h(s)ds = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k \varphi_k(x)$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдіктің екі жағын да $q(x)$ фунциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша a-дан b-ға дейін интегралдасақ,

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)h(s)q(x)dsdx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k q_k.$$

Егер $q(x) = h(x)$ болса, онда

$$J(h) = \int_a^b \int_a^b K(x,s)h(s)h(x)dsdx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k^2 .$$

Міне, осы теңдік ядроны кластарға бөлудің негізі болады. Бұл теңдік бойынша барлық меншікті мәндердің оң болуының қажетті де жеткілікті шарты – кез келген $h(x) \in L_2(a,b)$ үшін $J(h) > 0$ болуы. Расында, егер барлық $\lambda_k > 0$ болса, онда теңсіздіктен $J(h) > 0$ болатыны көрініп тұр. Енді сол меншікті мәндердің кемінде біреуін $\lambda_m < 0$ деп алайық және $h(x) = \varphi_m(x)$ болсын. Меншікті функциялардың ортонормаланғаны себепті $J(\varphi_m) = \dfrac{1}{\lambda_m}$ болады.

Егер симметриялық $K(x,s)$ ядросының барлық меншікті мәндері оң болса, онда ядро оң деп аталады. Бұл жағдайда $J(h) \geq 0$. Егер симметриялық $K(x,s)$ ядросының барлық меншікті мәндері теріс болса, онда ядро теріс делінеді. Бұл жағдайда $J(h) \leq 0$. Егер $\forall h(x) \in L_2[a,b]$ үшін $J > 0$ болса, онда оң симметриялық ядро анық (қатаң) оң делінеді. Егер $\forall h(x) \in L_2[a,b]$ үшін $J < 0$ болса, онда теріс симметриялық ядро анық (қатаң) теріс делінеді.

4 теорема. $K(x,s)$ ядросының анық оң болуы үшін, барлық меншікті мәндер оң және ядро түйық болуы қажетті де жеткілікті.

Дәлелдеуі. $K(x,s)$ ядросы түйық болмасын, онда $h(x) \neq 0$ үшін $\int_a^b K(x,s)h(s)ds = 0$ болады. Бұдан:

$$J(h) = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,s)h(s)ds \right] h(x)dx = 0,$$

яғни $K(x,s)$ анық оң емес. Сонымен, егер $K(x,s)$ ядросы анық оң болса, онда ол түйық.

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

Мерсер теоремасы. Егер симметриялық $K(x,s)$ ядросы негізгі $D=\{a\le x,s\le b\}$ облысында оң және үзіліссіз болса, онда бұл ядроның бисызықты қатары бірқалыпты жинақты.

Дәлелдеуі. Оң ядро үшін $K(x,s)$ екенін дәлелдейік.Қарсы жорып, (x_0,x_0) нүктесінде $K(x_0,x_0)<0$ деп ұйғарайық. Бұл жағдайда үзіліссіздік қасиеті бойынша $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ нүктесі үшін $K(x,s)<0$ болады. Мынадай функция құрайық:

$$h(x)=\begin{cases} h_1(x)>0, & x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon), \\ 0, & x\notin(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon); \end{cases}$$

бұл функция үшін

$$J(h)=\int_a^b\int_a^b K(x,s)h(s)h(x)dsdx=\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\int K(x,s)h_1(x)h_1(s)dsdx<0,$$

яғни оң болу шартына қарама-қайшы. Бұл қайшылық $K(x,s)>0$ екенін дәлелдейді.

Енді

$$Q(x,s)=K(x,s)-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x)\varphi_k(s) \qquad (88)$$

деп белгілейік. Әрине $Q(x,s)$ - үзіліссіз және симметриялық ядро. Енді осы $Q(x,s)$ ядросының оң екенін көрсетейік. Ол үшін $m>p$ болғанда $h=\varphi_m$ деп алайық. Онда $\{\varphi_m\}$ жүйенің ортонормаланғанын пайдаланып,

$$J(h)=\int_a^b\int_a^b Q(s,x)\varphi_m(x)\varphi_m(s)dsdx=\int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\varphi_m(x)dxds\ge 0,$$

яғни $Q(x,s)$ ядросының оң екенін дәлелдедік. Сондықтан $Q(x,x)>0$ Олай болса, (88) теңдігі бойынша

$$Q(x,x)=K(x,x)-\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k^2(x)>0$$

немесе барлық p үшін

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k^2(x)<K(x,x).$$

Сондықтан оң мүшелерден құралған $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k^2(x)$ қатар жинақты. Ал бисызықты қатар үшін

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x)\varphi_k(s)\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\left[\varphi_k^2(x)+\varphi_k^2(s)\right]$$

теңсіздігі орынды, ал бұл теңсіздіктен қатардың бірқалыпты жинақтылығы шығады. Сонымен

$$K(x,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\varphi_n(s)$$

теңдігі орынды. Бұдан $s=x$ деп алып, ортонормаланған $\{\varphi_n(x)\}$ үшін $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=\int_a^b K(x,x)dx=A_1$ теңдігін аламыз.

§ 5.5. Симметриялық интегралдық теңдеуге келтірілетін интегралдық теңдеулер

1. Қисық симмертиялық ядро. Фредгольмнің интегралдық

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds+f(x)$$

теңдеуін қарастырайық. Комплекс $K(x,s)$ ядросы үшін $K(x,s)=-\overline{K(s,x)}$ теңдігі орындалса, оны қисық симметриялық ядро деп айтады. Нақты $K(x,s)$ ядросы үшін $K(x,s)=-K(s,x)$ теңдігі орындалса, оны қисық симметриялық ядро деп айтады. Мысалы, $K(x,s)=x-s,\ K(x,s)=\sin(x-s)$ қисық симметриялық ядролар.

Егер $L(x,s)=iK(x,s)$ түріндегі ядроны алсақ, $L(x,s)=\overline{L(s,x)}$ демек, $L(x,s)$ симметриялық ядро. Егер жоғарыдағы берілген теңдеу қисық симметриялық ядролы теңдеу болса, оны

$$\varphi(x)=\mu\int_a^b L(x,s)\varphi(s)ds+f(x)$$

симметриялық ядролы түріндегі интегралдық теңдеуге келтіруге болады (мұндағы, $\mu=i\lambda$ немесе $\lambda=-i\mu$). Демек, берілген қисық симметриялық ядролы теңдеудің кемінде бір меншікті мәні бар болады және оның барлық меншікті мәндері жорамал сандар.

2. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеуге келтіретін теңдеу-лер. Қолданбалы есептерде

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b \rho(s)K(x,s)\varphi(s)ds+f(x)$$

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

түріндегі интегралдық теңдеу жиі кездеседі, мұндағы, $K(x,s)$ нақты симметриялық ядро және $\rho(x)\geq 0\,[a,b]$ кесіндіде белгілі функция. Бұл теңдеудің екі жағында $\rho(x)$-ке көбейтіп, одан кейін

$$\psi(x)=\sqrt{\rho(x)}\varphi(x) \tag{89}$$

өрнегімен жаңа функция енгізіп, белгісіз $\psi(x)$ үшін

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b M(x,s)\psi(s)ds+\sqrt{\rho(x)}\,f(x)$$

теңдеуін аламыз, мұндағы, $M(x,s)=\sqrt{\rho(x)\rho(s)}K(x,s)$ симметриялық ядро.

Егер $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\ldots$ сандары мен $\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots$ функциялары $M(x,s)$ ядросының сәйкес меншікті мәндері мен меншікті функциялары болса, онда $k\neq m$ болған жағдайда $\int_a^b \psi_k(x)\psi_m(x)dx=0$ екенін білеміз. (89) теңдігін ескерсек, біртекті

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b \rho(s)K(x,s)\varphi(s)ds$$

интегралдық (теңдеуінің меншікті функциялары $\varphi_k(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ бар және олар $\rho(x)$ салмақ функциясымен ортонормаланған, яғни барлық $k\neq m$ үшін

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_m(x)\varphi_k(x)dx=0$$

теңдігі орынды болады.

Екінші қайталанатын ядро үшін

$$M_2(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\psi_k(x)\psi_k(s)$$

меншікті функциялардың жіктеліп алынған жүйелері бойынша қатарға жіктеу орынды. Бұдан:

$$M_2(x,s)=\int_a^b M(x,t)M(t,s)dt=\int_a^b K(x,t)K(t,s)\rho(t)\sqrt{\rho(x)\rho(s)}dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\cdot\psi_k(x)\psi_k(s)=\sqrt{\rho(x)}\cdot\sqrt{\rho(s)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\cdot\varphi_k(x)\varphi_k(s),$$

бұл теңдіктің екі жағын $\sqrt{\rho(x)\rho(s)}$ шамасына қысқартсақ,

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

$$H_2(x,s)=\int_a^b K(x,t)K(t,s)\rho(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\cdot\varphi_k(x)\varphi_k(s).$$

Дәл осы жолмен

$$H_p(x,s)=\int_a^b H_{p-1}(x,t)K(t,s)\rho(t)dt,$$

ядросы үшін

$$H_p(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^p}\varphi_k(x)\varphi_k(s)$$

теңдігі алынады. Егер

$$M(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\psi_k(x)\psi_k(s)$$

жіктелуі орынды болса, онда

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x)\varphi_k(s)$$

және т.с.с.

3. Шмидт ядросы және ол ядроның меншікті функциялары. $H(x,s)\in L_2(D)$ симметриялық ядро емес, ал $H^*(x,s)=H(s,x)$ оның түйіндесі, бұларға сәйкес Фредгольм операторлары H және H^* болсын. Ал $K_1=H^*H$ және $K_2=HH^*$ симметриялық және оң операторлар дейік. Олардың ядролары

$$K_1(x,s)=\int_a^b H^*(x,t)H(t,s)dt,\ K_2(x,s)=\int_a^b H(x,t)H^*(t,s)dt$$

симметриялық және оң ядролар болады. Расында,

$$K_1(s,x)=\int_a^b H^*(s,t)H(t,x)dt=\int_a^b H(t,x)H^*(s,t)dt=\int_a^b H^*(x,t)H(t,s)dt=K_1(x,s),$$

$$\int_a^b\int_a^b K_1(x,t)h(x)h(s)dsdx=\int_a^b\int_a^b\left\{\int_a^b H^*(x,t)H(t,s)dt\right\}h(x)h(s)dsdx=$$

$$=\int_a^b dt\left\{\int_a^b H^*(x,t)h(x)dx\int_a^b H(t,s)h(s)ds\right\}=\int_a^b dt\left(\int_a^b H(t,s)h(s)ds\right)^2\geq 0.$$

Міне, осындай қасиеттері бар $K_1(x,s)$ және $K_2(x,s)$ ядролары $H(x,s)$ ядросы үшін Шмидт ядролары деп аталады.

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

Әрбір симметриялық емес $H(x,s)$ ядросына Шмидт екі ортогональ функцияны сәйкестендіреді, ал жалпы жағдайда берілген ядроның меншікті функциялары ешқандай байланысы жоқ жүйемен сәйкестендіреді. Екі $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функциялары (Шмидтің анықтауы бойынша)

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b H(x,s)\psi(s)ds,\ \psi(s)=\lambda\int_a^b H(s,x)\varphi(x)dx \qquad (90)$$

теңдеулерін қанағаттандырса, онда $\varphi(x)$ пен $\psi(s)$ функциялары одақтас меншікті функциялар деп аталады.(90) теңдеулеріндегі λ шамасы $H(x,s)$ ядросының меншікті мәні. Әрқашан меншікті функциялар пары бар болады. Расында, (90) теңдеулерінен $\psi(x)$ функциясын шығарып тастасақ, онда симметриялық ядролы

$$\varphi(x)=\lambda^2\int_a^b K_2(x,s)\varphi(s)ds$$

біртекті интегралдық теңдеуіне келеміз, мұндағы, $K_2(x,s)-$Шмидт ядросы. Егер (90) теңдеулерінен $\varphi(x)$ функциясын шығарып тастасақ, онда симметриялық ядролы

$$\psi(x)=\lambda^2\int_a^b K_1(x,s)\psi(s)ds \qquad (91)$$

біртекті интегралдық теңдеуін аламыз, мұнда да $K_1(x,s)-$Шмидт ядросы.

Егер (90) жүйесінің λ_i параметрлеріне сәйкес $\varphi_i(x),\psi_i(x)$ шешімдері болса, онда $K_1(x,s),K_2(x,s)$ ядролары үшін λ_i^2 сандары меншікті мәндер, ал $\psi_i(x)$ пен $\varphi_i(x)$ функциялары оларға сәйкес меншікті функциялар болады. Керісінше, λ_0-сол ядролардың біреуінің (мәселен, $K_1(x,s)$ядросының) меншікті мәні болсын. Бұл сан әрқашан оң. Ал $\varphi_0(x)$ функциясы сол λ_0 санына сәйкес меншікті функция болсын. Егер

$$\psi_0(x)=\sqrt{\lambda_0}\int_a^b H(t,x)\varphi_0(t)dt$$

деп алсақ, онда

$$\varphi_0(x)=\sqrt{\lambda_0}\int_a^b H(x,t)\psi_0(t)dt\,.$$

Сонымен, (90) теңдеулер жүйесінің шешімдерін табу мәселесі $K_1(x,s)$ немесе $K_2(x,s)$ симметриялық ядроларының біреуінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табу мәселесімен пара-пар. Бұл екі ядроның меншікті мәндері бірдей және оң болғандықтан $(\lambda_i\geq 0)$ оларды $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\ldots$ деп

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

белгілейік. $K_1(x,s)$ ядросының ортонормаланған меншікті функциялары $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ болсын.(90) теңдеуінің екіншісінде $\lambda=\lambda_i$ және $\varphi=\varphi_i(x)$ деп алсақ, (91) теңдеуінің λ_i меншікті мәніне сәйкес меншікті функциясын аламыз. Осылай алынған $\psi_i(x)$ функциялары да ортонормаланған жүйе құрайды.

Расында,

$$\psi_i(x)=\lambda_i\int_a^b H(t,x)\varphi_i(t)dt,\ \psi_k(x)=\lambda_k\int_a^b H(s,x)\varphi_k(s)ds$$

теңдеулерінен

$$\int_a^b \psi_i(x)\psi_k(x)dx=\lambda_i\lambda_k\int_a^b\left\{\int_a^b H(t,x)\varphi_i(t)dt\int_a^b H(s,x)\varphi_k(s)ds\right\}dx=$$

$$=\lambda_i\lambda_k\int_a^b\int_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_k(s)dtds=\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\int_a^b\varphi_i(t)\varphi_k(t)dt=\begin{cases}1, & i=k;\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$$

демек, $\{\psi_i(x)\}\ (i=1,2,...)$ жүйесі ортонормаланған.

4. Шмидт теоремасы. $\forall h(x)\in L_2(a,b)$ үшін

$$f(x)=\int_a^b H(x,s)h(s)ds \qquad (92)$$

теңдігі орынды екенін Шмидт дәлелдеген (мұндағы, $H(x,s)$ симметриялық емес ядро).

Теорема *(Шмидт).* $H(x,s)$-үзіліссіз ядро болсын. (92) теңдігімен анықталған кез келген $f(x)$ функциясы $H(x,s)$ ядросының меншікті функциялары $\{\varphi_i(x)\}$ арқылы бірқалыпты жинақты қатарға жіктеледі.

Дәлелдеуі. Теореманың шартына байланысты (92) теңдігімен анықталған $f(x)$ функциясы үзіліссіз болады. Ал $f(x)$ үшін Фурье коэффициенттері

$$f_i=\int_a^b\int_a^b H(x,s)h(s)\varphi_i(s)dsdx=\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b h(s)\psi_i(s)ds=\frac{h_i}{\lambda_i}.$$

Екінші жағынан,

$$\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}=\int_a^b H(x,s)\psi_i(s)ds$$

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

$H(x,s)$ ядросының Фурье коэффиценттері. Бессель теңсіздігінен $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h_i^2$ және $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$ қатарларының жинақтығы шығады. Сондықтан

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x)$$

қатары абсолютті және бірқалыпты жинақты. $R(x) = f(x) - S(x)$ деп белгілейік. $R(x)$ функциясы барлық $\varphi_i(x)$ функцияларына ортогональ. Расында,

$$\int_a^b R(x)\varphi_i(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx - (x)dx - \int_a^b S(x)\varphi_i(x)dx = \frac{1}{\lambda_i}(h_i - h_i) = 0,$$

демек,

$$\int_a^b R(x)S(x)dx = \int_a^b R(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)dx = \sum_a^b \frac{h_i}{\lambda_i}\int_a^b R(x)\varphi_i(x)dx = 0. \qquad (93)$$

Мына өрнекті қарастырайық:

$$\int_a^b H(x,t)f(x)dx = \int_a^b H(x,t)R(x)dx + \int_a^b H(x,t)S(x)dx.$$

Бұған (92) теңдігін пайдалансақ,

$$\int_a^b K_1(x,s)h(s)ds = \int_a^b H(x,t)R(x)dx + \int_a^b H(x,t)S(x)dx.$$

Гильберт-Шмидт теоремасы бойынша $\int_a^b K_1(x,s)h(s)ds$ функциясы $K_1(x,s)$ ядросының меншікті $\psi_i(x)$ функциялары арқылы коэффиценттрі $\frac{h_i}{\lambda_i^2}$ болған бірқалыпты жинақты қатарға жіктеуге болады. Екінші жағынан

$$\int_a^b H(x,t)S(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i^2}h_i\psi_i(t).$$

Сондықтан алдыңғы теңдіктен $\int_a^b H(x,t)R(x)dx = 0$.

Демек (93) және соңғы теңдіктерден

$$\int_a^b f(x)R(x)dx = \int_a^b\int_a^b H(x,s)h(s)R(x)dsdx = 0,$$

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

$$\int_a^b R^2(x)dx = \int_a^b R(x)\left[f(x) - S(x)\right]dx = 0,$$

яғни $R(x) = 0$. Ендеше

$$f(x) = S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x) \tag{94}$$

теңдігін аламыз. Бұл формуладан $\forall g(x) \in L_2[a,b]$ үшін

$$\int_a^b\int_a^b H(x,s)h(s)g(x)dsdx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \cdot g_i.$$

Осы тәсілмен кез келген $f(x) = \int_a^b H(x,s)g(x)ds$ функциясын $\psi_i(x)$ функциялары арқылы бірқалыпты жинақты $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} g_i \psi_i(x)$ қатарына жіктеуге болады. Теорема дәлелденді.

Енді (94) формуласын симметриялық

$$K_2(x,s) = \int_a^b H(x,t)H(t,s)dt$$

ядросына қолданайық. Сонда ол ядро

$$K_2(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}\psi_i(x)\psi_i(s) \tag{95}$$

түрінде жіктеледі. Дәл осылай

$$K_1(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}\psi_i(x)\psi_i(s)$$

қатарын аламыз.

$H(x,s)$ ядросын жіктейік. $\{\varphi_i(x)\}$ жүйесі бойынша

$$H(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(s)\varphi_i(x)$$

түрінде жіктейміз, мұндағы,

$$H_i(s) = \int_a^b H(x,s)\varphi_i(x)dx = \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(s),$$

ал бұл мәнді алдыңғы қатарға қойып,

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.

$$H_i(x,s) = \sum_a^b \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x)\psi_i(s)$$

қатарын аламыз. Бұл қатар x пен s бойынша орташа жинақты. Расында, жоғарыдағы өрнектерден

$$\int_a^b \left[H(x,s) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x)\psi_i(s) \right]^2 ds = \int_a^b H^2(s,x)ds - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}\varphi_i^2(x) =$$

$$= K_2(x,x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}\varphi_i^2(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}\varphi_i^2(x),$$

бұл (95) бірқалыпты жинақты қатарының қалдық мүшесі, сондықтан ол $n \to \infty$ жағдайда нөлге ұмтылады. Демек,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[H(x,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\varphi_i(x)\varphi_i(s) \right]^2 dx = 0.$$

ОРЫНБАСАРОВ М.О., САХАЕВ Ш.С.